# الهندســة ( الأشعــة في الفراغ)

## الثالث الثانوي العلمي

**$\frac{6}{95}$ (تعيين نقطة تلاقي مستقيمات)**

**نتأمل رباعي وجوه $A\,B\,C\,D$ و لتكن $x$ من $]0\,,1[$**

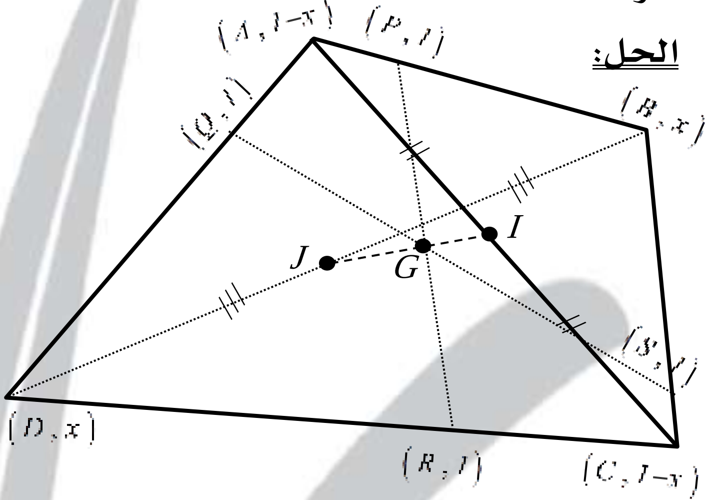
**و لتكن $P$ و $Q$ و $R$ و $S$ النقاط التي تحقق:**

$\overrightarrow{C\,R}=x\,\overrightarrow{C\,D}\ ,\ \overrightarrow{C\,S}=x\,\overrightarrow{C\,B}\ ,\ \overrightarrow{A\,P}=x\,\overrightarrow{A\,B}\ ,\ \overrightarrow{A\,Q}=x\,\overrightarrow{A\,D}$

**النقطتان $I$ و $J$ هما منتصفا الحرفان $[A\,C]$ و $[B\,D]$**

**و المطلوب: أثبت تلاقي المستقيمات $(I\,J)$ و $(P\,R)$ و $(Q\,S)$ في نقطة واحدة.**

**الحل:**




من علاقة الفرض $\overrightarrow{AQ}=x\,\overrightarrow{AD}$ و حسب نتيجة علاقة شال نكتب: $-\overrightarrow{Q\,A}=x\left(\overrightarrow{Q\,D}-\overrightarrow{Q\,A}\right)$

$$(1-x)\overrightarrow{Q\,A}+x\,\overrightarrow{Q\,D}=\vec{0}$$

إذاً $Q$ مركز أبعاد النقطتين $(A\,,1-x),(D\,,x)$

و بالمثل نجد $S$ مركز أبعاد النقطتين $(C\,,1-x),(B\,,x)$

و حسب الخاصة التجميعية تكون $G$ منتصف $[Q\,S]$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(Q\,,1),(S\,,1)$

و بالمثل نجد $P$ مركز أبعاد النقطتين $(A\,,1-x),(B\,,x)$

و بالمثل نجد $R$ مركز أبعاد النقطتين $(C\,,1-x),(D\,,x)$

فالنقطة $G$ منتصف $[P\,R]$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(P\,,1),(R\,,1)$ ، و ذلك حسب الخاصة التجميعية، فالمستقيمان $(P\,R)$ و $(Q\,S)$ متلاقيان في النقطة $G$

و بما أن النقطة $I$ منتصف $[A\,C]$ هي مركز أبعاد النقطتين $(C\,,1-x),(A\,,1-x)$

و كذلك $J$ منتصف $[D\,B]$ هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B\,,x),(D\,,x)$ ، فحسب الخاصة التجميعية، تكون النقطة $G$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $I$ و $J$

فالنقاط الثلاث : $I$ و $G$ و $J$ على استقامة واحدة.

فالمستقيمات $(I\,J)$ و $(P\,R)$ و $(Q\,S)$ متلاقية في $G$.

**$\frac{3}{94}$ نعطي معلماً متجانساً في الفراغ $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$**

**و نعطي النقطتين $A(1\,,0\,,0)$ و $B(4\,,3\,,-3)$**

**❶. أتكون مجموعة النقاط $M$ مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A\,,1-\alpha),(B\,,\alpha)$ عندما تتحول $\alpha$ في $R$، هي نفسها المستقيم المار بالنقطة $A$ و شعاع توجيهه $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ ؟**

**الحل:**

كنا قد رأينا في مبرهنة (1) الصفحة (78) أن المستقيم $(A\,B)$ هو مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A\,,1-\alpha),(B\,,\alpha)$ عندما تتحول $\alpha$ في $R$ ، إذاً مجموعة النقاط $M$ هي المستقيم $(A\,B)$.

و شعاع التوجيه المعطى $\vec{u}(1\,,1\,,-1)$ مرتبط خطياً مع الشعاع $\overrightarrow{A\,B}(3\,,3\,,-3)$ فالمستقيم المار من $A$ و شعاع التوجيه $\vec{u}$ هو المستقيم $(A\,B)$ نفسه الذي هو مجموعة النقاط $M$.

**❶. أتكون مجموعة النقاط $M$ مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط: $(A\,,1-x-y),(B\,,x),(O\,,y)$ عندما تتحول $y\,,x$ في $R$، هي نفسها المستوي المار بالنقطة $O$ و يقبل $\vec{i}$ و $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ شعاعي توجيهه ؟**

**الحل:**

كنا قد رأينا في مبرهنة (2) الصفحة (79) أن المستوي $(A\,B\,O)$ هو مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A\,,1-x-y),(B\,,x),(O\,,y)$ عندما يتحول $y\,,x$ في $R$ ، إذاً مجموعة النقاط $M$ هي المستوي $(A\,B\,O)$.

و من جهة أخرى $\overrightarrow{O\,A}=\vec{i}$ و $\vec{v}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A\,B}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ هما شعاعا توجيه للمستوي $(O\,A\,B)$ ، و هما غير مرتبطين خطياً فالمستوي $(O\,A\,B)$ الذي يمر من $O$ و يقبل $\overrightarrow{O\,A}$ و $\vec{v}$ شعاعي توجيه له يمثل مجموعة النقاط $M$.

$\frac{8}{96}$ نتأمل رباعي وجوه $ABCD$ و النقاط $P$ و $Q$ و $R$ هي نقاط تجعل $ABPC$ و $ABQD$ و $ACRD$ متوازيات أضلاع ، نهدف إلى إثبات تلاقي المستقيمات $(DP)$و$(CQ)$و$(BR)$

❶.A) أثبت أن النقطة $P$ هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:
$(A,-1),(B,1),(C,1)$

B) عبر بالمثل عن $Q$ بصفتها مركز أبعاد متناسبة للنقاط : $A$ و $B$ و $D$ و كذلك عبر عن $R$ بصفتها مركز أبعاد متناسبة للنقاط $A$ و $C$ و $D$.

❷. بالاستفادة من النقطة $I$ و هي مركز أبعاد متناسبة مختارة للنقاط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ و من الخاصة التجميعية، أثبت تلاقي المستقيمات $(DP)$و$(CQ)$و$(BR)$ و عيّن موقع $I$ على هذه المستقيمات.

**الحل:**

❶. A) بما أن $ABPC$ متوازي أضلاع إذاً:

$$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC} \Rightarrow -\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

أي أن $P$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

$$(A,-1),(B,1),(C,1)$$

B) بما أن الرباعي $ABQD$ متوازي أضلاع إذاً نكتب:

$$\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QD} \Rightarrow -\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QD}=\vec{0}$$

أي أن $Q$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

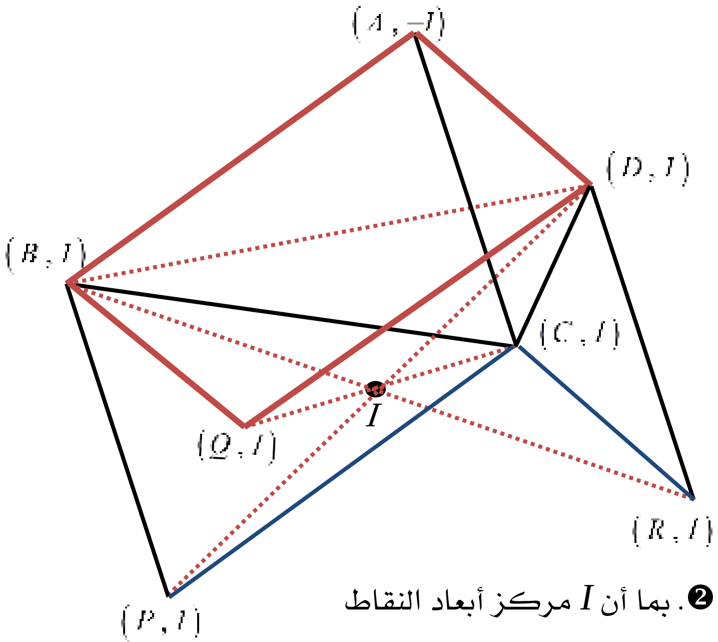
$$(A,-1),(B,1),(D,1)$$

و بما أن الرباعي $ACRD$ متوازي أضلاع ⇐

$$\overrightarrow{RA}=\overrightarrow{RD}+\overrightarrow{RC} \Rightarrow -\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{RD}+\overrightarrow{RC}=\vec{0}$$

إذاً $R$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

$$(C,1),(D,1),(A,-1)$$




❷. بما أن $I$ مركز أبعاد النقاط

$$(A,-1),(B,1),(C,1),(D,1)$$

و بما أن $(Q,1)$ مركز أبعاد النقاط الثلاث:

$(A,-1),(B,1),(D,1)$ فحسب الخاصية التجميعية

تكون $I$ مركز أبعاد النقطتين :

$(Q,1),(C,1) \Leftarrow I$ منتصف $[QC]$

كما رأينا أن $(P,1)$ مركز أبعاد النقاط الثلاث:

$(A,-1),(B,1),(C,1)$ فحسب الخاصية التجميعية

تكون $I$ مركز أبعاد النقطتين :

$(P,1),(D,1) \Leftarrow I$ منتصف $[PD]$

و رأينا أيضاً أن $(R,1)$ مركز أبعاد النقاط الثلاث:

$(A,-1),(D,1),(C,1)$ فحسب الخاصية التجميعية

تكون $I$ مركز أبعاد النقطتين :

$(B,1),(R,1) \Leftarrow I$ منتصف $[BR]$

فالمستقيمات $(DP)$و$(CQ)$و$(BR)$ تلتقي في نقطة $I$

تقع في منتصف كل القطع المستقيمة

$[DP]$ و $[CQ]$ و $[BR]$